TEMEL KAVRAMLAR

A. Rakam

Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere, rakam denir. Onluk sayma sistemindeki rakamlar,

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 dur.

B. Sayı

Bir çokluk belirtecek şekilde, rakamların bir araya getirilmesiyle oluşan ifadelere, sayı denir.

Örnek:

$18, 275, \frac{27}{4}, -\frac{11}{2}, 95, \sqrt{5}, \pi$ ifadeleri birer sayıdırlar.

Uyarı

Her rakam bir sayıdır. Fakat her sayı bir rakam olmayabilir.

Örnek:

$1, 5, 6, 9$ birer rakam ve aynı zamanda birer sayıdır.

$-15, 19, \frac{27}{4}$ ifadeleri birer sayıdır, fakat onluk sayma sisteminde rakam değildirler.

Örnek:

a ve b birbirinden farklı birer rakam olmak üzere $a+b$ nin alabileceği <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değeri bulalım.

Çözüm:

$a+b$ nin en büyük olabilmesi için, a ve b nin en büyük değeri alması gerekir. $a \neq b$ olduğundan, ikisini de 9 alamayız.

Buna göre, $a+b$ toplamının alabileceği en büyük değer;

$a+b = 9+8 = 17$ olur.

$a+b$ nin en küçük olabilmesi için, a ve b nin en küçük değeri alması gerekir. $a \neq b$ olduğundan, ikisini de 0 alamayız.

Buna göre, $a+b$ toplamının alabileceği en küçük değer;

$a+b = 0+1 = 1$ olur.

C. Sayıların Sınıflandırılması

1. Doğal Sayılar

$N = \{0,1,2,3,...\}$ kümesinin her bir elemanına, bir doğal sayı denir.

2. Sayma Sayıları

$N^{+} = \{1,2,3,...\}$ kümesinin her bir elemanına, pozitif doğal sayı veya sayma sayısı denir.

3. Tam Sayılar

$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ kümesinin her bir elemanına, tam sayı denir.

4. Pozitif Tam Sayılar

$Z^{+} = \{1,2,3,...\}$ kümesinin her bir elemanına, pozitif tam sayı denir.

5. Negatif Tam Sayılar

$Z^{-} = \{\ldots -3,-2,-1\}$ kümesinin her bir elemanına, negatif tam sayı denir.

Uyarı

Sıfır bir tam sayıdır. Ancak sıfır pozitif veya negatif değildir. Yani işaretsizdir.

Sonuç

Tam sayılar kümesi; negatif tam sayılar, sıfır ve pozitif tam sayılardan oluşur. Bunu matematiksel olarak,

$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup Z^{+}$ şeklinde gösterebiliriz.

6. Rasyonel Sayılar

a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.

Rasyonel sayılar kümesi,

$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z \text{ ve } b \neq 0 \right\}$ dir.

7. İrrasyonel Sayılar

Rasyonel olmayan sayılara, irrasyonel sayılar denir. Diğer bir ifade ile, virgülden sonrası kesin olarak bilinmeyen sayılara irrasyonel sayılar denir.

İrrasyonel sayılar kümesi, $Q^{'}$ ile gösterilir.

Buna göre, $Q^{'}$ kümesi; $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılardan oluşur. Burada a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ dır.

Örnek:

$\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{3}$, π sayıları birer irrasyonel sayıdır.

Örnek:

$\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$ sayıları birer rasyonel sayıdır; irrasyonel sayı değildir.

Sonuç

Hem rasyonel, hem de irrasyonel olan sayı yoktur.

8. Reel (Gerçel) Sayılar

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi olan kümeye, reel (gerçel) sayılar kümesi denir.

Reel sayılar kümesi, $R = Q \cup Q^{'}$ ile ifade edilir.

Örnek:

-5, 7, $\frac{4}{7}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 2π sayıları birer reel sayıdır.

9. Karmaşık (Komplex) Sayılar

a ve b birer reel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = a + ib$ şeklinde ifade edilen z sayısına karmaşık (komplex) sayı denir.

Örnek:

$2 + i$, $3 - \sqrt{2}.i$, $\sqrt{2}$ sayıları birer karmaşık sayıdır.

Uyarı

Bilimsel kaynaklarda doğal sayılar kümesi N sembolüyle, tam sayılar kümesi Z sembolüyle, rasyonel sayılar kümesi Q sembolüyle, reel sayılar kümesi R sembolüyle, komplex sayılar kümesi C sembolüyle gösterilmektedir.

Örnek:

a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$a.b = 24$

olduğuna göre, $a + b$ nin <u>en büyük</u> değerini ve <u>en küçük</u> değerini bulalım.

Çözüm:

a ve b doğal sayı olduğuna göre, çarpımları 24 olan doğal sayıları ve bu sayıların toplamını bulalım.

a.b	a	b	a+b
24	1	24	25
24	2	12	14
24	3	8	11
24	4	6	10

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi, a+ b nin en büyük değeri 25, en küçük değeri 10 dur.

Sonuç

Çarpımları sabit olan iki doğal sayı; birbirine en uzak seçildiğinde toplamları en büyük değeri alır, birbirine en yakın seçildiğinde toplamları en küçük değerini alır.

Örnek:

a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$a + b = 32$

olduğuna göre, $a.b$ nin en büyük değerini ve en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

a ve b doğal sayı olduğuna göre, toplamları 32 olan doğal sayıların bazılarını ve bu sayıların çarpımını bulalım.

a+b	a	b	a.b
32	0	32	0
32	1	31	31
32	2	30	60
32	16	16	256

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi, a. b nin en büyük değeri 256, en küçük değeri 0 dır.

Sonuç

Toplamları sabit olan iki doğal sayı; birbirine en uzak seçildiğinde çarpımları en küçük değeri alır, birbirine en yakın seçildiğinde çarpımları en büyük değerini alır.

D. Tam Sayı Çeşitleri

1. Çift Sayı

n bir tam sayı olmak üzere; $2n$ genel ifadesiyle belirtilen tam sayılara çift sayı denir.

Diğer bir ifadeyle; 2 ile bölündüğünde kalanı 0 olan tam sayılara çift sayı denir.

$Ç = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ şeklinde gösterilir.

2. Tek Sayı

n bir tam sayı olmak üzere; $2n - 1$ genel ifadesiyle belirtilen tam sayılara tek sayı denir.

Diğer bir ifadeyle; 2 ile bölündüğünde kalanı 1 olan tam sayılara tek sayı denir.

$T = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$ şeklinde gösterilir.

Örnek:

5 ve 3 birer tek sayıdır.

Bu iki tek sayı için aşağıdaki işlemleri inceleyelim:

5 + 3 = 8 çift sayıdır.

5 – 3 = 2 çift sayıdır.

5.3 = 15 tek sayıdır.

Sonuç

İki tek sayının toplamı ve farkı çift sayı, çarpımı tek sayıdır.

T bir tek sayı olmak üzere,

T + T toplamı çift,

T – T farkı çift,

T . T çarpımı tek sayıdır.

Örnek:

6 ve 8 birer çift sayıdır.

Bu iki çift sayı için aşağıdaki işlemleri inceleyelim:

8 + 6 = 14 çift sayıdır.

8 – 6 = 2 çift sayıdır.

8 . 6 = 48 çift sayıdır.

Sonuç

İki çift sayının toplamı, farkı ve çarpımı çift sayıdır.

Ç bir çift sayı olmak üzere,

Ç + Ç toplamı çift,

Ç – Ç farkı çift,

Ç . Ç çarpımı çift sayıdır.

Örnek:

7 tek ve 4 çift sayıdır.

Bu iki sayı için aşağıdaki işlemleri inceleyelim:

7 + 4 = 11 tek sayıdır.

7 – 4 = 3 tek sayıdır.

7 . 4 = 28 çift sayıdır.

Sonuç

Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı ve farkı tek sayı, çarpımı çift sayıdır.

T bir tek sayı ve Ç bir çift sayı olmak üzere,

T + Ç toplamı tek,

T – Ç farkı tek,

Ç – T farkı tek,

T . Ç çarpımı çift sayıdır.

Örnek:

4 bir çift sayıdır. Bu durumda,

$4^1 = 4$ çift sayıdır.

$4^2 = 16$ çift sayıdır.

$4^3 = 64$ çift sayıdır.

Sonuç

Çift sayıların tüm pozitif tam sayı kuvvetleri yine bir çift sayıdır.

Buna göre, n pozitif bir tam sayı ve Ç bir çift sayı olmak üzere; $Ç^n$ nin sonucu daima çift sayıdır.

Örnek:

5 bir tek sayıdır. Bu durumda,

$5^0 = 1$ tek sayıdır.

$5^1 = 5$ tek sayıdır.

$5^2 = 25$ tek sayıdır.

$5^3 = 125$ tek sayıdır.

Sonuç

Tek sayıların tüm doğal sayı kuvvetleri yine bir tek sayıdır.

Buna göre, n bir doğal sayı ve T bir tek sayı olmak üzere; T^n nin sonucu daima tek sayıdır.

Örnek:

m tek sayı ve n çift sayı olmak üzere;

$m^2 + n + 3$

ifadesinin, tek sayı mı yoksa çift sayı mı olduğunu araştıralım.

Çözüm:

m tek sayı ve n çift sayı olduğuna göre, $m = 1$ ve $n = 2$ seçelim.

Buna göre,

$m^2 + n + 3 = 1^2 + 2 + 3 = 6$ çift sayıdır.

Örnek:

m tek sayı ve n çift sayı olmak üzere;

$3m - 2n + 2$

ifadesinin, tek sayı mı yoksa çift sayı mı olduğunu araştıralım.

Çözüm:

m tek sayı ve n çift sayı olduğuna göre, $m = 1$ ve $n = 2$ seçelim.

Buna göre,

$3m - 2n + 2 = 3.1 - 2.2 + 2 = 3 - 4 + 2 = 1$ tek sayıdır.

Örnek:

a, b, c birer tam sayı olmak üzere;

$3ab - 7 = 2c$

olduğuna göre, a, b, c nin tek sayı mı yoksa çift sayı mı olduğunu araştıralım.

Çözüm:

$3ab - 7 = 2c$ ise $3ab = 2c + 7$ olur.

Buna göre, c tam sayısı ister tek, ister çift olsun 2c daima çifttir. Çift sayı ile tek sayının toplamı tek sayı olduğundan 2c + 7 sayısı tektir.

2c + 7 tek ise eşiti olan 3ab çarpımı da tek sayıdır.

Bir çarpımın sonucu tek ise, her bir çarpan tek sayıdır.

Buna göre 3ab tek ise, a ve b tek sayıdır.

Sonuç olarak a, b, c birer tam sayı olmak üzere;

$3ab - 7 = 2c$ ise, a,b tek sayı c ise tek sayı veya çift sayıdır.

3. Pozitif Sayı, Negatif Sayı

Sıfırdan büyük sayılara, pozitif sayılar; sıfırdan küçük sayılara, negatif sayılar denir.

Uyarı

Pozitif sayıların bütün kuvvetleri pozitiftir. Buna göre,

$a > 0$ ise, $a^n > 0$ dır.

Örnek:

$5 > 0$ ve $5^3 = 5.5.5 = 125 > 0$ dır.

Uyarı

Negatif sayıların çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatiftir.

$(n \in Z$ ve $a < 0)$ ise, $a^{2n} > 0$

ise, $a^{2n+1} < 0$ dır.

Örnek:

$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9 > 0$ dır.

Örnek:

$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -27 < 0$ dır.

Uyarı

Aynı işaretli iki sayının (ikisi de pozitif veya ikisi de negatif) çarpımları ve bölümleri pozitiftir.

a ile b aynı işaretli ise

$a.b > 0$ ve $\frac{a}{b} > 0$ dır.

Örnek:

$5.2 = 10 > 0$, $\frac{5}{2} = 2,5 > 0$ dır.

Uyarı

Zıt işaretli iki sayının (biri pozitif, diğeri negatif) çarpımları ve bölümleri negatiftir.

a ile b zıt işaretli ise

$a.b < 0$ ve $\frac{a}{b} < 0$ dır.

Örnek:

$5.(-2) = -10 < 0$, $\dfrac{5}{-2} = -2{,}5 < 0$ dır.

Örnek:

$x < 0 < y$ olduğuna göre, $x^7.y^3$ ifadesinin işaretini bulalım.

Çözüm:

x negatif, y pozitif olduğu için,

$x = -1$ ve $y = 1$ alabiliriz.

Buna göre,

$x^7.y^3 = (-1)^7.1^3 = (-1).1 = -1$ negatiftir.

$x < 0 < y$ ise $x^7.y^3 < 0$ dır.

Örnek:

$x < 0 < y$ olduğuna göre, $\dfrac{x-y}{xy}$ ifadesinin işaretini bulalım.

Çözüm:

x negatif, y pozitif olduğu için,

$x = -1$ ve $y = 1$ alabiliriz.

Buna göre,

$\dfrac{x-y}{xy} = \dfrac{(-1)-1}{(-1).1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$ pozitiftir.

Buna göre,

$x < 0 < y$ ise $\dfrac{x-y}{xy} > 0$ dır.

Örnek:

a, b, c birer reel (gerçel) sayıdır.

$a^3.b^2 < 0$, $b.c^2 > 0$, $a.c > 0$

olduğuna göre, a, b, c nin işaretlerini bulalım.

Çözüm:

b^2 daima pozitif olduğu için, $a^3.b^2 < 0$ ise a^3 negatif olmalıdır. Negatif sayının tek kuvveti negatif olduğu için, a negatiftir.

c^2 daima pozitif olduğu için, $b.c^2 > 0$ ise b pozitif olmalıdır.

$a.c > 0$ ise a ile c aynı işaretlidir. a negatif olduğuna göre, c de negatiftir.

Buna göre,

a, b, c nin işaretleri sırasıyla $-,+,-$ dir.

Uyarı

$x.y$ çarpımı bazen "." İşareti kullanılmadan yani, xy şeklinde gösterilir.

4. Ardışık Sayılar

Belli bir kurala göre, art arda sıralanan sayılara, ardışık sayılar denir.

n bir sayma sayısı olmak üzere,

Ardışık doğal sayılar:

$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Ardışık tam sayılar:

$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Ardışık çift sayılar:

$\ldots, -2n, \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots$

Ardışık tek sayılar

$$\ldots, -2n-1, \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots$$

7 nin katı olan ardışık doğal sayılar

$$0, 7, 14, 21, \ldots, 7n, \ldots$$

şeklinde gösterilir.

Örnek:

İki basamaklı ardışık üç doğal sayının toplamının en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

İki basamaklı en küçük doğal sayı 10 dur. Buna göre, iki basamaklı ardışık üç doğal sayının toplamı en az,

$10 + 11 + 12 = 33$ tür.

Örnek:

3 ün katı olan ardışık 3 tam sayının toplamı 54 tür.
Bu sayılardan ortancasını bulalım.

Çözüm:

1.Yol

3 ün katı olan üç ardışık sayı,

$3n, 3n+3, 3n+6$ olsun.

$$3n + 3n + 3 + 3n + 6 = 54$$

$$9n + 9 = 54$$

$$9n = 45$$

$$n = 5 \text{ olur.}$$

Ortanca sayı $3n + 3$ tür.

Buna göre, ortanca sayı, $3n + 3 = 3.5 + 5 = 18$ bulunur.

2.Yol

Aradığımız sayıya x diyelim. 3 ün katı olan ardışık sayılar 3 er 3 er arttığı için, x ten bir sonraki sayı $x + 3$, bir önceki sayı ise $x - 3$ tür.

Buna göre,

$$x - 3 + x + x + 3 = 54$$

$$3x = 54$$

$$x = 18 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

a, b, c ardışık üç çift sayı ve $a < b < c$ olmak üzere,

$$(b-a)^3 + (c-a)^2 + (a-b)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

1.Yol

$a = x$ olsun.

Bu durumda, $b = x + 2$, $c = x + 4$ olur.

Buna göre,

$b - a = x + 2 - x = 2$ dir.

$a - b = x - (x + 2) = -2$ dir.

$c - a = x + 4 - x = 4$ tür.

Buna göre,

$$(b-a)^3 + (c-a)^2 + (a-b) = 2^3 + 4^2 + (-2)$$

$$= 8 + 16 - 2 = 22 \text{ dir.}$$

2.Yol

$a < b < c$ olduğundan,

$a = 2$, $b = 4$, $c = 6$ alınabilir.

Bu durumda,

$$(b-a)^3 + (c-a)^2 + (a-b) = (4-2)^3 + (6-2)^2 + (2-4)$$

$$= 8 + 16 - 2 = 22 \text{ dir.}$$

a. Ardışık Sayıların Sonlu Toplamları

✓ $1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}$

✓ $2+4+6+...+2n=n.(n+1)$

✓ $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Yukarıdaki eşitliklerin her birinde terim sayısı n dir.

Örnek:

$$1+2+3+...+99=\frac{99.(99+1)}{2}=99.50=4950$$

Örnek:

$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$2n=20$ ise $n=10$ dur.

Buna göre,

$$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$$

$$=10.(10+1)=10.11=110$$ bulunur.

Örnek:

$1+3+5+...+99$ toplamında,

$2n-1=99$ ise $n=50$ dir.

Buna göre,

$1+3+5+...+99=50^2=2500$ bulunur.

Kural

Artış miktarları eşit olan ardışık sayılardan sonlu tanesinin toplamını bulmak için aşağıdaki formülü kullanabiliriz:

r : ilk terim

n : son terim

x : artma miktarı olmak üzere,

$$r+(r+x)+(r+2x)+...+n=\frac{(n+r).(n-r+x)}{2x}$$ dir.

Örnek:

Artış miktarları eşit olan,

$5+8+11+...+74+77$

toplamını bulalım.

Çözüm:

İlk terim 5, son terim 77, artma miktarı 3 tür.

Buna göre,

$$5+8+11+...+74+77=\frac{(77+5).(77-5+3)}{2.3}$$

$$=\frac{82.75}{6}=41.25=1025$$ olur.

Örnek:

$15+18+21+...+99+102$

toplamını bulalım.

Çözüm:

1.Yol

İlk terim 15, son terim 102, artma miktarı 3 tür.

Buna göre,

$$15+18+21+...+102=\frac{(102+15).(102-15+3)}{2.3}$$

$$=\frac{117.90}{6}=117.15=1755$$ olur.

2.Yol

$$15+18+21+\ldots+99+102$$

$$=3.(5+6+7+\ldots+34)$$

$$=3.\left[(1+2+3+..+34)-(1+2+3+4)\right]$$

$$=3.\left[\frac{34.35}{2}-\frac{4.5}{2}\right]$$

$$=3.(17.35-2.5)$$

$$=3.585=1755 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek:

$A=1.2+2.3+\ldots+30.31$

$B=5.6+10.9+\ldots+150.93$

olduğuna göre, B sayısının A sayısının kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$B=5.6+10.9+\ldots+150.93$$

$$=(5.1).(3.2)+(5.2).(3.3)+\ldots+(5.30).(331)$$

$$=5.1.3.2+5.3.2.3+\ldots+5.3.30.31$$

$$=5.3(1.2+.2.3+\ldots+30.31)$$

$$=15.A$$

Buna göre, B sayısı A sayısının 15 katıdır.

5. Asal Sayı

1 ve kendisinden başka pozitif tam böleni olmayan, 1 den büyük doğal sayılara, asal sayı denir.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41

sayıları birer asal sayıdır.

Sonuç

En küçük asal sayı 2 dir. 2 den başka çift asal sayı yoktur.

Örnek:

$100=10.10$ olduğu için, 100 sayısı asal değildir.

$111=3.37$ olduğu için, 111 sayısı asal değildir.

101 sayısı asaldır.

Çözümlü Sorular

1.

$$\begin{array}{r} A \\ \times\ B \\ \hline C \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işlemine göre A.B.C çarpımı aşağıdakilerden hangisine daima eşittir?

A) A B) B C) C D) A^2 E) C^2

Çözüm:

$A.B=C$ ise $A.B.C=C.C=C^2$ olur.

2.

$$\begin{array}{r} 2324 \\ \times\quad abc \\ \hline 6972 \\ \cdots\cdot\ \\ +\ \cdots\cdot\ \ \\ \hline \cdots\cdot\cdot\ \ \text{(çarpım)} \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işleminde c kaçtır?

Çözüm:

Verilen çarpma işlemine göre,

$2324.c=6972$ dir.

Buradan,

$c=\dfrac{6972}{2324}=3$ bulunur.

3. a, b, c birbirinden farklı üç pozitif tam sayı olmak üzere,

$$a.b.c = 12 \quad , \quad c - 3 = (-1)^{200} - 1^{101} \quad , \quad a \neq 1$$

olduğuna göre a, b, c yi bulunuz.

Çözüm:

$c - 3 = (-1)^{200} - 1^{101} \Rightarrow c - 3 = 1 - 1 \Rightarrow c = 3$ tür.

$a.b.c = 12 \Rightarrow a.b.3 = 12 \Rightarrow a.b = 4$ tür.

$a.b.c = 12 \Rightarrow a.b.3 = 12 \Rightarrow a.b = 4$

$a.b = 4$ ise $a = 1$ ve $b = 4$ . . . (1) veya

$a = 2$ ve $b = 2$ . . . (2) veya

$a = 4$ ve $b = 1$ . . . (3) olmalıdır.

$a \neq 1$ olduğu için (1). durum alınmaz.

$a \neq b$ olduğu için (2). durum alınmaz.

Bu durumda (3). durum alınır.

$a = 4$ ve $b = 1$ olduğuna göre a, b, c sırasıyla 4,1,3 olur.

4. a, b, c sıfırdan farklı birer pozitif tam sayıdır.

$$a + b = 5.c$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşit olamaz?

A) 18 B) 24 C) 27 D) 30 E) 42

Çözüm:

a, b, c pozitif tam sayı, $a + b = 5.c$ olduğuna göre,

$a + b + c = 5.c + c = 6c$ olur.

Buna göre, c pozitif tam sayı olduğu için, $a + b + c$ toplamı 6 nın katı olmalıdır. C seçeneğindeki 27 sayısı 6 nın katı olmadığı için, bu üç sayının toplamı olamaz.

5. a, b, c birer tam sayı ve $a > 0$, $b > 0$ dır.

$a.c = 7$ ve $b.c = 11$ olduğuna göre $a + b + c$ kaçtır?

Çözüm:

a, b, c tam sayı ve $a > 0$, $b > 0$ dır.

$a.c = 7$ ise $c = 1$ veya $c = 7$ dir.

$b.c = 11$ ise $c = 1$ veya $c = 11$ dir.

c her iki eşitlikte de ortak olduğu için, $c = 1$ olmalıdır.

Buna göre,

$c = 1$, $a = 7$ ve $b = 11$ olmalıdır.

Buna göre, $a + b + c = 7 + 11 + 1 = 19$ olur.

6. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \quad \text{ve} \quad \frac{b}{c} = \frac{2}{5}$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ ise, $b = 3a$ . . . (1)

$\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$ ise, $c = \frac{5b}{2} = \frac{5.3a}{2} = \frac{15a}{2}$ . . . (2)

(1) ve (2) yi $a + b + c$ toplamında yerine yazalım.

$a + b + c = a + 3a + \frac{15a}{2} = \frac{23a}{2}$ dir.

a, b, c tam sayı olduğuna göre $\frac{23a}{2}$ tam sayı olmalıdır.

Buna göre, a çift sayı olmalıdır. a en küçük değerini aldığında $\frac{23a}{2}$ en küçük değerini alır.

$a = 2$ için $a + b + c = \frac{23a}{2} = \frac{23.2}{2} = 23$ olur.

7. x, y birer pozitif tam sayı ve $y < 20$ olmak üzere,

$$3x + 4y = 105$$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

x in en küçük değerini alabilmesi için, y nin mümkün olduğu kadar büyük olması gerekir.

Bunun için, $y = 19$ olabilir.

Fakat $y = 19$ iken x tam sayı olmamaktadır.

Bunun için, $y = 18$ alınırsa,

$$3x + 4.18 = 105 \Rightarrow 3x + 72 = 105$$

$$\Rightarrow 3x = 33$$

$$\Rightarrow x = 11 \quad \text{bulunur.}$$

8. x, y, z pozitif tam sayılardır.

$$\frac{12}{x} = \frac{y}{4} = \frac{2}{z}$$

olduğuna göre, z nin alabileceği en büyük değer için $x + y + z$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\frac{12}{x} = \frac{y}{4} = \frac{2}{z}$ olmak üzere,

$\frac{12}{x} = \frac{2}{z}$ ise, $2x = 12z \Rightarrow x = 6z$ dir.

$\frac{y}{4} = \frac{2}{z}$ ise, $y.z = 2.4 \Rightarrow y = \frac{8}{z}$ dir.

y pozitif bir tam sayı olduğu için, z sayısı 8 i bölen bir sayı olmalıdır. Yani, z sayısı 1,2,4,8 olabilir. Soruda z nin en büyük değeri için $x + y + z$ toplamı sorulduğundan

$z = 8$ almalıyız.

$z = 8$ ise, $x = 6z = 6.8 = 48$ ve $y = \frac{8}{z} = \frac{8}{8} = 1$ olur.

Buna göre,

$x + y + z = 48 + 1 + 8 = 57$ bulunur.

9. m ve n birer tam sayıdır.

$$\frac{3m}{2} = n + 1$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A. n bir tek sayıdır.
B. n bir çift sayıdır.
C. m pozitiftir.
D. m bir tek sayıdır.
E. m bir çift sayıdır.

Çözüm:

$\frac{3m}{2} = n + 1$ ise $3m = 2.(n + 1)$ olur.

n bir tam sayı olduğu için $n + 1$ de bir tam sayıdır. Buna göre, $2.(n + 1)$ çift sayıdır. Bu durumda $3m$ çarpımı çift bir sayıdır. 3 tek olduğu için m daima çift sayı olmalıdır.

10. x bir doğal sayı olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) $x^2 + x$ B) $x^3 + 2x + 3$ C) $x^3 - x^2 + x + 4$

D) $\frac{x^2 + 3x}{2}$ E) $4x^2 - x^3 + x + 1$

Çözüm:

x bir doğal sayı olarak verilmiştir. Bunun için tek te olabilir, çift de olabilir. Şıkların daima tek olanını bulmak için x yerine hem tek, hem de çift doğal sayı değerleri verelim.

$x = 3$ veya $x = 4$ olsun.

Bu durumda tüm seçenekleri inceleyelim:

A) $x=3$ için $x^2+x=3^2+3=12$ çifttir.

$x=4$ için $x^2+x=4^2+4=20$ çifttir.

Buna göre, x bir doğal sayı iken x^2+x daima çifttir.

B) $x=3$ için $x^3+2x+3=3^3+2.3+3=36$ çifttir.

$x=4$ için $x^3+2x+3=4^3+2.4+3=75$ tektir.

Buna göre, x bir doğal sayı iken x^3+2x+3 bazen çift, bazen tektir.

C) $x=3$ için,

$x^3-x^2+x+4=3^3-3^2+3+4=25$ tektir.

$x=4$ için,

$x^3-x^2+x+4=4^3-4^2+4+4=56$ çifttir.

Buna göre, x bir doğal sayı iken x^3-x^2+x+4 bazen çift, bazen tektir.

D) $x=3$ için $\dfrac{x^2+3x}{2}=\dfrac{3^2+3.3}{2}=9$ tektir.

$x=4$ için $\dfrac{x^2+3x}{2}=\dfrac{4^2+3.4}{2}=14$ çifttir.

Buna göre, x bir doğal sayı iken $\dfrac{x^2+3x}{2}$ bazen çift, bazen tektir.

E) $x=3$ için,

$4x^2-x^3+x+1=4.3^2-3^3+3+1=13$ tektir.

$x=4$ için,

$4x^2-x^3+x+1=4.4^2-4^3+4+1=5$ tektir.

Buna göre, x bir doğal sayı iken $4x^2-x^3+x+1$ daima tektir.

11. a,b,c birer reel sayıdır.

$a^2.b<0$, $b^5.c>0$, $c.a^3<0$

olduğuna göre a,b,c nin işaretlerini bulunuz.

Çözüm:

1.Yol

$a^2.b<0$ ise, a^2 ile b ters işaretlidir.

$a^2\ge 0$ olduğundan $b<0$ dır.

$b^5.c>0$ ise, b^5 ile c aynı işaretlidir.

$b^5<0$ olduğundan $c<0$ dır.

$c.a^3<0$ ise, c ile a^3 ters işaretlidir.

$c<0$ olduğundan $a>0$ dır.

Buna göre a,b,c nin işaretleri sırasıyla + , - , - dir.

2.Yol

Bir reel sayının çift kuvveti pozitif olacağı için böyle bir terimin olup olmaması eşitsizliğin yönünü değiştirmez. Tek kuvvetler sayının işaretini değiştirmeyeceği için atılabilir. Bunun için,

$a^2.b<0$ eşitsizliği yerine $b<0$ ı alabiliriz.

$b^5.c>0$ eşitsizliği yerine $b.c>0$ ı alabiliriz.

$c.a^3<0$ eşitsizliği yerine $c.a<0$ ı alabiliriz.

$b.c>0$ ve $b<0$ ise $c<0$ bulunur.

$c.a<0$ ve $c<0$ ise $a>0$ bulunur.

12. 98 ile 295 arasında bulunan ve 3 ün tam katı olan ardışık doğal sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm:

98 ile 295 arasında bulunan ve 3 ün tam katı olan ardışık doğal sayıların toplamı,

$$99 + 102 + 105 + \ldots + 294 = 3.(33 + 34 + \ldots + 98)$$

$$= 3.\left[(1 + 2 + \ldots + 98) - (1 + 2 + 3 + . . . + 32)\right]$$

$$= 3.\left[\frac{98.99}{2} - \frac{32.33}{2}\right]$$

$$= 3.(4851 - 528)$$

$$= 3.4323 = 12969 \text{ bulunur.}$$

13. 2 den 2n ye kadar olan çift doğal sayıların toplamı a, 10 dan 2n ye kadar olan çift doğal sayıların toplamı b ile gösteriliyor.

$$a + b = 740$$

olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm:

$a = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2n$

$b = 10 + 12 + ... + 2n$

$a - b = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ olur.

Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 740 \\ a - b = 20 \end{array}\right\} 2a = 760 \Rightarrow a = 380 \text{ bulunur.}$$

14. $15 + 30 + 45 + ... + 435 + 450$ toplamının sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$15 + 30 + 45 + ... + 435 + 450 = 15.(1 + 2 + 3 + ... + 30)$$

$$= 15.\frac{30.31}{2} = 6975 \text{ olur.}$$

15. a, b, c reel sayıları için,

$$a^5.c^6 = 0 \quad , \quad a^3.b^2 > 0 \quad , \quad a^3.b^5 < 0$$

olduğuna göre a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

$a^3.b^2 > 0$ ise, $a^3 > 0 \Rightarrow a > 0$ dır.

$a > 0$ ve $a^5.c^6 = 0$ ise $c = 0$ dır.

$a > 0$ ve $a^3.b^5 < 0$ ise $b < 0$ dır.

O halde $b < c < a$ olur.

16. n bir doğal sayı olmak üzere,

$$n + (n + 1) + \ldots + (n + k)$$

biçiminde verilen ardışık doğal sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz.

A) 23 B) 26 C) 40 D) 57 E) 77

Çözüm:

$n + (n + 1) + \ldots + (n + k)$ ifadesinde,

$n = 5$ için, $5 + 6 + 7 + 8 = 25$ dir.

$n = 6$ için, $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$ tır.

$n = 7$ için, $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$ dir.

$n = 8$ için, $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77$ dir.

Buna göre, verilen toplamın sonucu 23 olamaz.

17. Üç tane ardışık çift sayının çarpımı -192 olduğuna göre, bu sayılardan en küçüğü kaçtır?

Çözüm:

Ardışık üç çift sayıdan en küçüğü x olsun.

$$x.(x + 2).(x + 4) = -192$$

$x.(x+2).(x+4) = -(4.48)$

$x.(x+2).(x+4) = -(4.6.8)$

$x.(x+2).(x+4) = -(8.6.4)$

$x.(x+2).(x+4) = (-8).(-6).(-4)$ ise $x = -8$ dir.

18. a, b, c birer tam sayı olmak üzere,

$a.b = 36$, $b.c = 18$

olduğuna göre, $a + b + c$ nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$a.b = 36$ ve $b.c = 18$ olacak şekilde bazı tam sayıları ve toplamlarını bulalım.

a	b	c	a+b+c
36	1	18	55
-2	-18	-1	-21
-6	-6	-3	-15
-36	-1	-18	-55

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi, $a + b + c$ nin en küçük değeri -55 tir.

19. A ve B pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{A}{B} - \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre $A + B$ nin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{A}{B} - \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$ ise $\frac{A}{B} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10}$ dur.

A ve B pozitif tm sayı olduğuna göre, A en az 11, B en az 10 değerini alır.

Buna göre, $A + B = 11 + 10 = 21$ olur.

20.

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times \quad abc \\ \hline 702 \\ \ldots \\ +234 \\ \hline 28782 \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işleminde a, b, c birer rakamdır.
Buna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{array}{rl} 234 & \text{I} \\ \times \quad abc & \text{II} \\ \hline 702 & \text{III} \\ xyz & \text{IV} \\ +234 & \text{V} \\ \hline 28782 & \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işleminde III. sayı, c ile 234 ün çarpımı olduğundan,

$c = 702 : 234 = 3$ tür.

V. sayı ise, a ile 234 ün çarpımı olduğundan,

$a = 234 : 234 = 1$ dir.

IV. sayıyı bulurken de toplamadan yararlanalım. IV. Sayı

xyz olsun. Dikkat edilirse, 0 ile z nin toplamının 8 olması gerekmektedir.

Buna göre $z = 8$ dir.

7, y, 4 rakamlarının toplamı ise, 17 olmalıdır.

$7 + y + 4 = 17$ ise $y = 6$ dır.

x , 3 ve elde var 1 in toplamı da 8 olmalıdır.

$x + 3 + 1 = 8$ ise $x = 4$ tür.

Buna göre, xyz sayısı, 468 dir.

Verilen işleme göre, $b.234 = 468$ ise $b = 468 : 234 = 2$ dir.

Bu durumda abc sayısı 123 tür.

O halde, $a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$ bulunur.

21. x, y, z pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$5x = 15y = \frac{z}{5}$$

olduğuna göre, $x + y + z$ nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$5x = 15y = \frac{z}{5}$ eşitliğinden,

$5x = \frac{z}{5}$ ise, $x = \frac{z}{25}$

$15y = \frac{z}{5}$ ise, $y = \frac{z}{75}$ olur.

$x + y + z = \frac{z}{25} + \frac{z}{75} + z = \frac{79z}{75}$

$x + y + z$ toplamının en küçük olması için $z = 75$ olmalıdır.

Buradan, $x + y + z = \frac{79z}{75} = \frac{79.75}{75} = 79$ bulunur.

22. a, b, c pozitif tam sayılardır.

$a.b = 77$ ve $b.c = 88$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$a.b = 77$ ise $a = 77$, $b = 1$ veya $a = 7$, $b = 11$ dir.

$b. = 88$ ise $c = 88$, $b = 1$ veya $c = 8$, $b = 11$ dir.

b her iki eşitlikte de ortak olduğu için

$b = 1$ veya $b = 11$ dir.

$a + b + c$ nin en küçük değerini alabilmesi için

$b = 11$, $c = 8$, $a = 7$ olmalıdır.

Buradan, $a + b + c = 7 + 11 + 8 = 26$ bulunur.

23. x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$3x + 2y + 2z = 43$

olduğuna göre, $x + y + z$ nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$3x + 2y + 2z = 43$

$3x + 2.(y + z) = 43$

Toplam sabit, x in kat sayısı 3 ve $y + z$ nin katsayısı 2 olduğuna göre; $x + y + z$ nin en küçük değerini alabilmesi için, x in mümkün olan en büyük pozitif tam sayı ve $y + z$ nin mümkün olan en küçük pozitif tam sayı seçilmesi gerekir.

Buna göre,

$x = 11$ ve $y + z = 5$ alınırsa

$x + y + z = 11 + 5 = 16$ bulunur.

x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılar olduğu için

$x = 13$ ve $y + z = 2$ olamaz.

24. a, b, c birbirinden farklı sayma sayılarıdır.

$a + b = 3$

$a.c = 4$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

1.Durum

$a.c = 4$ ise, $a = 4$ ve $c = 1$ olabilir.

$a + b = 3$ ise, $4 + b = 3 \Rightarrow b = -1$ olur.

Halbuki, soruda a, b, c birer sayma sayısı olarak verilmişti.

Buna göre $a = 4$ ve $c = 1$ olamaz.

2.Durum

$a.c = 4$ ise, $a = 2$ ve $c = 2$ olabilir.

Halbuki, soruda a, b, c birbirinden farklı olarak verilmişti.

Buna göre $a = 2$ ve $c = 2$ olamaz.

3.Durum

$a.c = 4$ ise, $a = 1$ ve $c = 4$ olabilir.

$a + b = 3$ ise, $1 + b = 3 \Rightarrow b = 2$ olur.

Buna göre, $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ olur.

Bu durumda, $a + b + c = 1 + 2 + 4 = 7$ dir.

25. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$a + b = 5c$

$c + a = 27$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

$a + b = 5c$ ise, $a = 5c - b$ olur.

$c + a = 27$

$c + (5c - b) = 27$

$6c - b = 27$ olur.

Bu eşitliğe uygun olacak şekilde b nin en küçük değerini seçersek buna bağlı olarak c ve a da en küçük değerini alır.

Burada, b yi en küçük 3 seçebiliriz. Çünkü c nin pozitif bir tam sayı olması için sonucun 6 nın katı olması gerekir.

Buna göre, $6c - 3 = 27$

$6c = 27 + 3 \Rightarrow c = 5$ bulunur.

Buna göre, $a + b = 5c$

$a + 3 = 5.5 \Rightarrow a = 22$ bulunur.

Demek ki, $a = 22$, $b = 3$, $c = 5$ tir.

Buna göre, $a + b + c = 22 + 3 + 5 = 30$ dur.

26. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$a.b = 85$

$10a - a.b < 2$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

$a.b = 85$ değerini $10a - a.b < 2$ eşitsizliğinde yerine yazarsak,

$10a - 85 < 2 \Rightarrow 10a < 85 + 2$

$\Rightarrow 10a < 85 + 2$

$\Rightarrow a < \frac{87}{10}$ olur.

a pozitif tam sayı olduğundan 8,7,6,5,4,3,2,1 değerlerini alabilir.

$a.b = 85$ ise, $b = \frac{85}{a}$ olur.

b nin pozitif tam sayı olabilmesi için, $a = 5$ veya $a = 1$ olabilir. Buradan,

$a = 5$ iken, $b = \frac{85}{a} = \frac{85}{5} = 17$

$a = 1$ iken, $b = \frac{85}{a} = \frac{85}{1} = 85$ olur.

Buna göre, $a + b$ toplamı en az 22 olur.

27. x ve y birer doğal sayıdır.

$x + \frac{10}{y} = 8$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Çözüm:

x ve y birer doğal sayı olduğu için, y yi 10 u bölebilen sayılardan seçmeliyiz.

Yani, y sayısı 1,2,5,10 değerlerini alabilir.

Buna göre,

$y=1$ için, $x+\frac{10}{1}=8$ ise, $x=-2\notin N$ olur.

$y=2$ için, $x+\frac{10}{2}=8$ ise, $x=3\in N$ olur.

$y=5$ için, $x+\frac{10}{5}=8$ ise, $x=6\in N$ olur.

$y=10$ için, $x+\frac{10}{10}=8$ ise, $x=7\in N$ olur.

Buna göre, x in alabileceği değerler: 3,6,7 dir.

x in alabileceği değerlerin toplamı:

$3+5+7=16$ olur.

28. a,b,c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{15}{a.b}=\frac{20}{b.c}=\frac{25}{a.c}$$

olduğuna göre, $a+b+c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{15}{a.b}=\frac{20}{b.c}=\frac{25}{a.c}$ eşitliğinde,

$\frac{15}{a.b}=\frac{20}{b.c}$ ise, $\frac{3}{a}=\frac{4}{c}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$ olur.

$\frac{20}{b.c}=\frac{25}{a.c}$ ise, $\frac{4}{b}=\frac{5}{a}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$ olur.

$\frac{15}{a.b}=\frac{25}{a.c}$ ise, $\frac{3}{b}=\frac{5}{c}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$ olur.

$\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$ ise, $\frac{c}{a}=\frac{20}{15}$ olur.

$\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$ ise, $\frac{a}{b}=\frac{15}{12}$ olur.

$\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$ ise $\frac{c}{b}=\frac{20}{12}$ olur.

$a+b+c$ toplamının en küçük değerini alabilmesi için, eşitliğin üç tarafını da sağlayacak şekilde

$a=15$, $b=12$, $c=20$ alınmalıdır.

Buna göre, $a+b+c=15+12+20=47$ olur.

29. Aşağıdakilerden hangisinin sonucu bir çift sayıdır?

A) $5^{11}+2^{8}$ B) $9^{3}-6^{3}$ C) $7^{3}.9^{3}+4$

D) $8^{3}-6+2^{4}$ E) $3^{14}.4+5^{10}$

Çözüm:

Şıkları inceleyelim.

F. 5 tek sayı olduğu için tüm pozitif tam sayı kuvvetleri tektir. Yani 5^{11} tektir. 2 çift sayı olduğu için tüm pozitif tam sayı kuvvetleri çifttir. Yani 2^{8} çifttir. Tek sayı ile çift sayının toplamı tek olduğundan $5^{11}+2^{8}$ toplamı tektir.

G. 9 tek sayı olduğundan için tüm pozitif tam sayı kuvvetleri tektir. Yani 9^{3} tektir. 6 çift sayı olduğu için tüm pozitif tam sayı kuvvetleri çifttir. Yani 6^{3} çifttir. Tek sayı ile çift sayının farkı tek olduğundan $9^{3}-6^{3}$ toplamı tektir.

H. 7^{3} tek sayı ve 9^{3} tek sayı olduğundan $7^{3}.9^{3}$ çarpımı da tektir. 4 çift sayıdır. Tek sayı ile çift sayının toplamı tek olduğundan $7^{3}.9^{3}+4$ toplamı tektir.

D. 8^3 ve 2^4 çift sayıdır. 6 da çift sayıdır. Bu durumda $8^3 - 6 + 2^4$ sayısı çift sayıdır.

E. 3^{14} tek sayıdır. 4 çift sayıdır. Bu durumda $3^{14}.4$ çift sayıdır. 5^{10} tek sayıdır. Çift sayı ile tek sayının toplamı tek sayı olduğuna göre, $3^{14}.4 + 5^{10}$ tektir.

30. a, b tek sayılar ve c çift sayı olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi daima çift sayıdır?

A) $\dfrac{a+b+c}{2}$ B) $a+b+\dfrac{c}{2}$ C) $\dfrac{a-b+c}{2}$

D) $\dfrac{a+b}{2} - c$ E) $\dfrac{(a+b).c}{2}$

Çözüm:

Şıklardan hangisinde verilenin daima çift sayı belirttiği sorulduğu için, çift sayı belirtmediğine bir örnek vermemiz yeterlidir.

A. $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ seçersek,

$\dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{1+3+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ tektir.

B. $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ seçersek,

$a + b + \dfrac{c}{2} = 1 + 3 + \dfrac{2}{2} = 4 + 1 = 5$ tektir.

C. $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ seçersek,

$\dfrac{a-b+c}{2} = \dfrac{1-1+2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ tektir.

D. $a = 1$, $b = 5$, $c = 2$ seçersek,

$\dfrac{a+b}{2} - c = \dfrac{1+5}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$ tektir.

E. $\dfrac{(a+b).c}{2} = (a+b).\dfrac{c}{2}$ yazalım.

a ve b tek ise, $a + b$ daima çifttir. c çift sayı olduğu için $\dfrac{c}{2}$ bazen çift bazen tektir. Bu iki sayının çarpımı, daima çifttir.

31. $a < 0 < b < c$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi daima negatiftir?

A) $\dfrac{b-a}{c}$ B) $\dfrac{a-c}{a-b}$ C) $a+b+c$

D) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{b}$ E) $-\dfrac{a.b}{c}$

Çözüm:

A. a negatif olduğundan, $-a$ pozitiftir.

Buna göre, $b - a$ pozitif olur. c de pozitif olduğu için

$\dfrac{b-a}{c}$ daima pozitiftir.

B. c ve b pozitif olduğundan $-c$ ve $-b$ negatif olur. a da negatif olduğu için $a - c$ ve $a - b$ negatiftir. İki negatif sayının birbirine bölümü pozitif olduğu için $\dfrac{a-c}{a-b}$ daima pozitiftir.

C. $b + c$ pozitiftir. Buna göre, $a + b + c$ toplamı a nın alacağı değere göre, bazen pozitif, bazen negatiftir.

D. Zıt işaretli iki sayının birbirine bölümü negatif olduğu için $\dfrac{a}{c}$ ve $\dfrac{a}{b}$ negatiftir. İki negatif sayının toplamı da negatif olduğu için, $\dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{b}$ daima negatiftir.

E. $a.b$ negatiftir. $\dfrac{a.b}{c}$ negatiftir. $-\dfrac{a.b}{c}$ pozitiftir.

32. Ardışık iki pozitif tek sayıdan küçük olanının 2 katı ile büyük olanının 3 katının toplamı 71 dir.

Buna göre, büyük sayı kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

Ardışık iki pozitif tek sayı $2n+1$ ile $2n+3$ olsun.

Ardışık iki pozitif tek sayıdan küçük olanının 2 katı ile büyük olanının 3 katının toplamı 71 ise,

$$2.(2n+1)+3.(2n+3)=71$$

$$4n+2+6n+9=71$$

$$10n+11=71$$

$$n=6 \text{ dır.}$$

Buna göre, büyük sayı, $2n+3=2.6+3=15$ tir.

2.Yol

Ardışık iki pozitif tek sayıdan büyük olanı x ise, küçük olanı $x-2$ olur.

Verilenlere göre,

$$3x+2.(x-2)=71$$

$$3x+2x-4=71$$

$$5x-4=71$$

$$5x=75$$

$$x=15 \text{ bulunur.}$$

33. a,b,c doğal sayılar ve

$$a+5b-8=2c+2$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi her zaman çift sayıdır?

A) $a.b$ B) $b.c$ C) $a+b$

D) $a+c$ E) $b+c$

Çözüm:

1.Yol

$a+5b-8=2c+2$ ise, $a+5b=2c+10$ dur.

a,b,c doğal sayılar olmak üzere,

$a+5b=2c+10$ eşitliğinde,

$2c$ çift sayı ve $2c+10$ çift sayıdır. . . . (*)

$a+5b=2c+10$ eşitliğinin sağ tarafındaki $2c+10$ çift sayı olduğuna göre, sol tarafındaki $a+5b$ de çift sayıdır.

$5b$ nin tek ya da çift oluşu b ye bağlıdır. Yani, b tek sayı ise $5b$ tek sayıdır. b çift sayı ise $5b$ çift sayıdır.

Buna göre, $5b$ ile b sayısının tek ya da çift sayı oluşu aynıdır. Buna göre, $a+5b$ çift sayı ise, $a+b$ de çift sayıdır.

2. Yol

$a+5b-8=2c+2$ ise, $a+5b=2c+10$ dur.

$c=1$ için, $a+5b=12$ ise, ($b=1$ ve $a=7$) olabilir.

Bu durumda A ve B seçeneğinde verilen $a.b$ ve $b.c$ ifadeleri tek sayıdır.

$c=2$ için, $a+5b=14$ ise, ($b=1$ ve $a=9$) olabilir.

Bu durumda A, B, D, E seçeneklerinde verilen ifadeler "daima çift sayıdır" denilemez. Bu durumda seçeneklerde verilen $a+b$ toplamı daima çift sayıdır.

34. $101+103+105+...+199$ toplamının sonucu kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

$$r+(r+x)+(r+2x)+...+n=\frac{(n+r).(n-r+x)}{2x}$$

olduğuna göre,

$101+103+105+...+199$

$$=\frac{(199+101).(199-101+2}{2.2}$$

$$=\frac{300.100}{4}=300.25=7500$$

2.Yol

$101 + 103 + 105 + \dots + 199$

$= (1 + 3 + 5 + \dots + 199) - (1 + 3 + 5 + \dots + 99)$ olur.

$2n - 1 = 199 \Rightarrow n = 100$ olur.

$1 + 3 + 5 + \dots + 199 = 100^2 = 10000$ dir.

$2n - 1 = 99 \Rightarrow n = 50$ olur.

$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 50^2 = 2500$ dür.

$101 + 103 + 105 + \dots + 199$

$= (1 + 3 + 5 + \dots + 199) - (1 + 3 + 5 + \dots + 99)$

$= 10000 - 2500 = 7500$ bulunur.

35. 5 in katı olan ardışık dört doğal sayının toplamı 130 dur.

Buna göre, bu sayılardan en büyüğü ile en küçüğünün toplamı kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

5 in katı olan, ardışık dört doğal sayıdan en küçüğüne x diyelim. Diğer sayılar 5 er 5 er artacağına göre,

x , $x + 5$, $x + 10$, $x + 15$ olur.

Verilenlere göre,

$$x + x + 5 + x + 10 + x + 15 = 130$$

$$4x + 30 = 130$$

$$x = 25 \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre, en küçük sayı x, en büyük sayı $x + 15$ olduğundan bu sayılar 25 ve 40 tır.

Buna göre, en küçük sayı ile en büyük sayının toplamı:

$$25 + 40 = 65 \text{ tir.}$$

2.Yol

5 in katı olan ardışık dört doğal sayıdan en küçüğü ile en büyüğünün toplamı A ise, diğer ikisinin toplamı da A dır. Buna göre, 5 in katı olan ardışık dört doğal sayının toplamı 130 ise,

$A + A = 130 \Rightarrow 2A = 130 \Rightarrow A = 65$ tir.

36. n bir doğal sayı olmak üzere,

$T = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

biçiminde ardışık sayıların toplamı olarak yazılan toplamda her bir terim 1 artırılırsa T toplamı kaç artar?

Çözüm:

1.Yol

$T = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ toplamında her bir terim 1 arttırıldığında oluşan sayıların toplamı A olsun.

Bu durumda,

$A = (2 + 1) + (4 + 1) + (6 + 1) + \dots + (2n + 1)$

$A = 3 + 5 + 7 + \dots + 2n + 1$ olur.

Bizden istenilen toplamdaki artış miktarıdır. Bu da A – T dir.

Buna göre,

$A = 3 + 5 + 7 + \dots + 2n + 1$

$T = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

$A - T = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ olur.

$A - T$ nin eşiti n tane 1 in toplamıdır. Bu durumda,

$A - T = n$ dir.

2.Yol

$n = 3$ için, T toplamının son terimi $2n = 6$ olur. Buna göre,

$T = 2 + 4 + 6 = 12$ dir.

$T = 2 + 4 + 6$ toplamında her bir terim 1 arttırıldığında oluşan sayıların toplamı A olsun.

Bu durumda, $A = 3 + 5 + 7 = 15$ olur.

Bu koşullarda T deki artış 15 – 12 = 3 tür.

Buna göre T deki artış miktarı $3 = n$ dir.

3.Yol

$T = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$

$T = 2.(1 + 2 + 3 + ... + n)$

olduğuna göre, T nin eşiti olan ifade n terimden oluşmaktadır. Bu n terimden her biri 1 arttırılırsa toplam n artar.

37. a ve b birbirinden farklı birer pozitif tam sayıdır.

$(a + 7).(b - 3) = ab + 11$

olduğuna göre, b nin alabileceği en küçük iki farklı değerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

a ve b birbirinden farklı birer pozitif tam sayı

$(a + 7).(b - 3) = ab + 11$

$ab - 3a + 7b - 21 = ab + 11$

$-3a + 7b - 21 = +11$

$-3a + 7b = 32$

$7b - 3a = 32$ dir.

$7b - 3a = 32$ ise, $a = 1$ ve $b = 5$ veya

$7b - 3a = 32$ ise, $a = 8$ ve $b = 8$ veya

$7b - 3a = 32$ ise, $a = 15$ ve $b = 11$ veya

……………………………………………….

olur. Burada dikkat edilirse, $7b - 3a = 32$ eşitliğini sağlayan a nın alabileceği değerler 7 şer 7 şer artarken, b nin alacağı değerler 3 er 3 er artmaktadır.

a ve b birbirinden farklı olduğu için, b nin en küçük iki değeri 5 ile 11 dir.

Buna göre, b nin alabileceği en küçük iki farklı değerinin toplamı, 5 + 11 = 16 dır.

KONU BİTMİŞTİR.