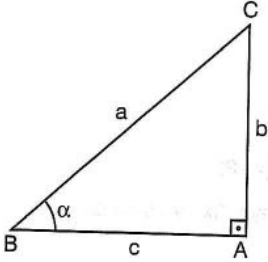


Doğrunun Analitiği

Dik Üçgende Dar Açının Tanjantı

ABC dik üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = \alpha$



$$\tan \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = \frac{b}{c}$$

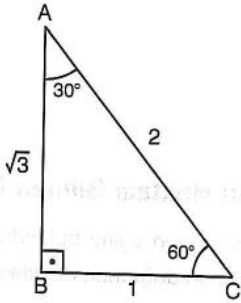
* Bazı özel açılardan tanjant değerlerini bulalım.

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

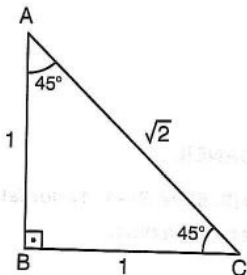


$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 135^\circ = -1$$

$$\tan 0^\circ = 0$$

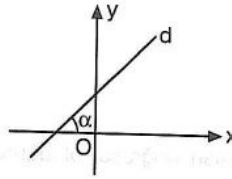
$$\tan 90^\circ \text{ tanımsız}$$



Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi:

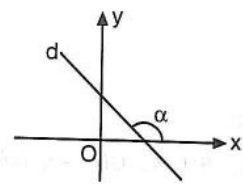
Analitik düzlemde bir doğrunun x eksenine pozitif yönde (saatin işleyiş yönünün tersi) yaptığı açıya, doğrunun **eğim açısı** ve bu açının tanjantına da doğrunun **eğimi** denir.

Bir d doğrusunun eğim açısı α ise eğimi $m = \tan \alpha$ dir.



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

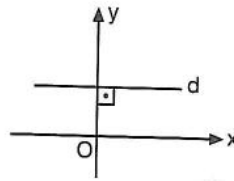
$$m = \tan \alpha > 0$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

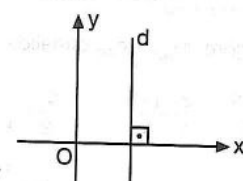
$$m = \tan \alpha < 0$$

Eksenlere dik olan doğruların eğimi:



$$d \perp Oy \ (\alpha = 0)$$

$$m = \tan 0^\circ$$

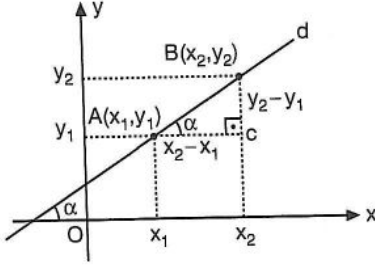


$$d \perp Ox \ (\alpha = 90^\circ)$$

$$m = \tan 90^\circ \text{ tanımsız}$$

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi



$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun eğim açısı α olsun. ABC dik üçgeninde

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ÖRNEK:

$A(1, 2)$ ve $B(-1, 5)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$m = \frac{5 - 2}{-1 - 1} = -\frac{3}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$A(3, -1)$, $B(1, 4)$, $C(k, -3)$ noktaları doğrusal olduğuna göre, k kaçtır?

- A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{19}{5}$ E) 4

ÇÖZÜM:

Bir doğrunun eğimi ile bu doğru üzerinde bulunan doğru parçalarının eğimleri aynıdır.

Buna göre, $m_{AB} = m_{AC}$ olmalıdır.

$$\frac{4 - (-1)}{1 - 3} = \frac{-3 - (-1)}{k - 3}, \quad \frac{5}{-2} = \frac{-2}{k - 3}$$

$$k = \frac{19}{5} \text{ dir.}$$

(Cevap D)

Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

Eğimi m ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ÖRNEK:

$A(2, -3)$ noktasından geçen ve eğimi 3 olan doğrunun denklemini yazınız.

ÇÖZÜM:

I. Yol:

$$y - (-3) = 3 \cdot (x - 2)$$

$$y = 3x - 9 \text{ veya } 3x - y - 9 = 0 \text{ dir.}$$

II. Yol:

Eğimi m olan doğrunun denklemini $y = mx + n$ şeklinde de yazabiliriz.

$y = 3x + n$, $A(2, -3)$ noktası bu doğrunun üzerinde olduğu için doğrunun denklemini sağlar.

$$-3 = 3 \cdot 2 + n, \quad n = -9$$

$$y = 3x - 9 \text{ dir.}$$

İki Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

Doğrunun eğimi bulunduktan sonra, bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi kullanılır.

ÖRNEK:

$A(2, 5)$ ve $B(-1, 1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

ÇÖZÜM:

A(2, 5) ve B(-1, 1) noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun.

$$m = \frac{1-5}{-1-2} = \frac{4}{3}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ doğru denkleminde x_1 ve y_1 yerine A veya B noktasının koordinatları yazılır.

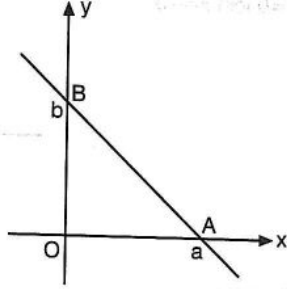
$$y - 5 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$4x - 3y + 7 = 0 \text{ dir.}$$

Eksenleri Kestiği Noktaları Bilinen Doğrunun Denklemi

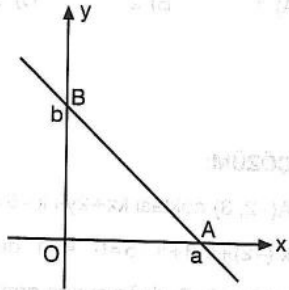
x eksenini A(a, 0) ve y eksenini B(0, b) noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ÖRNEK:

Analitik düzlemde eksenleri kestiği noktaları verilen doğrunun denklemini bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

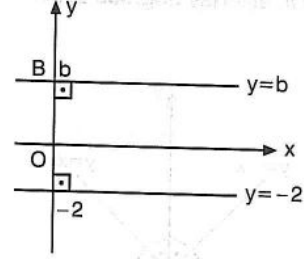
$$3x - 2y + 6 = 0 \text{ dir.}$$

Eksenlere Paralel Doğruların Denklemleri

Yatay Eksene Paralel Olan Doğrunun Denklemi

x eksenine paralel doğruların eğimi $m=0$ dir.

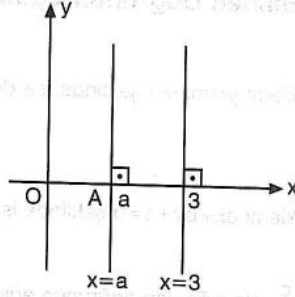
B(0, b) noktasından geçen ve eğimi 0 olan doğrunun denklemi: $y=b$



Düşey Eksene Paralel Olan Doğrunun Denklemi

y eksenine paralel doğruların eğimi tanımsızdır.

A(a, 0) noktasından geçen ve eğimi tanımsız doğrunun denklemi: $x=a$

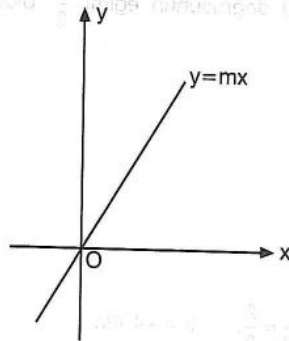


Orijinden Geçen Doğruların Denklemleri

O(0, 0) dan geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi

$$y - 0 = m(x - 0)$$

$$y = mx$$

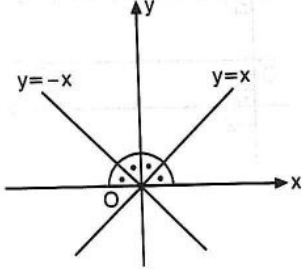


DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

Birinci ve İkinci Açıortay Doğruları:

Eğim açısı 45° , eğimi 1 olan ve orijinden geçen $y=x$ doğrusuna I. açıortay doğrusu denir.

Eğim açısı 135° , eğimi -1 olan ve orijinden geçen $y=-x$ doğrusuna da II. açıortay doğrusu denir.



Denklemleri Bilinen Doğrunun Eğimi

* Doğru denklemi $y=mx+n$ şeklinde ise doğrunun eğimi m dir.

* Doğru denklemi $ax+by+c=0$ şeklinde ise y yalnız bırakıldığında

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ olacağından doğrunun eğimi}$$

$$m = -\frac{a}{b} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$kx - (k-2)y + 5 = 0$ doğrusunun eğimi $\frac{2}{3}$ olduğuna göre, k kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$m = \frac{2}{3} \text{ ise } \frac{k}{k-2} = \frac{2}{3}, \quad k = -4 \text{ tür.}$$

Denklemleri Verilen Doğrunun Grafiği

Doğru denklemi $x=0$ için y ve $y=0$ için x değerleri bulunarak doğrunun eksenleri kestiği $A(0, y)$ ve $B(x, 0)$ noktaları elde edilir.

Bu noktalar analitik düzlemde birleştirilirse doğrunun grafiği çizilmiş olur.

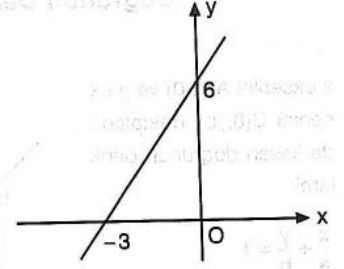
ÖRNEK:

$y-2x-6=0$ denklemi ile verilen doğrunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

$y-2x-6=0$ denkleminde $x=0$ için $y=6$

$y=0$ için $x=-3$



ÖRNEK:

$A(-2, 3)$ noktası $kx+2y+k-5=0$ doğrusunun üzerinde olduğuna göre, $kx+2y+k-5=0$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM:

$A(-2, 3)$ noktası $kx+2y+k-5=0$ denklemini sağlar.

$k(-2)+2.3+k-5=0$, $k=1$ dir.

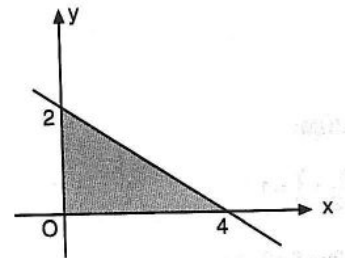
$x+2y-4=0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$x=0$ için $y=2$

$y=0$ için $x=4$

Taralı alan

$$\frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$



(Cevap D)

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

a) Kesişen Doğrular:

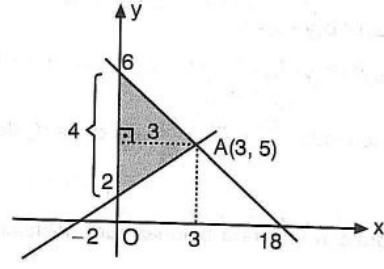
$$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

denklem sisteminde, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise doğrular **bir noktada kesişir**.

Doğruların kesim noktasını bulmak için doğru denklemlerinin ortak çözümü yapılır.

ÇÖZÜM:



Doğruların grafiklerini çizdiğimizde oluşan taralı bölge istenen alandır.

$$x - 2y + 2 = 0$$

$$x + 3y - 18 = 0$$

doğrularını ortak çözdüğümüzde A(3, 5) bulunur.

Taralı bölgenin alanı: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ br}^2$ dir.

(Cevap B)

ÖRNEK:

$x - 2y + 4 = 0$ ve $3x + y + 5 = 0$ doğrularının kesim noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (0, 1) B) (-1, 1) C) (-2, 1) D) (-2, 2) E) (-2, 0)

b) Paralel Doğrular:

$$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

denklem sisteminde, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise d_1 ve d_2 doğruları **paraleldir**.

Doğrular paralel olduğu için doğruların ortak noktası yoktur.

ÖRNEK:

$$(a - 2)x + 2y + 1 = 0$$

$$(a + 1)x - 3y - 4 = 0$$

doğruları paralel olduğuna göre, **a kaçtır?**

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{7}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{r} x - 2y + 4 = 0 \\ + \quad 2 \cdot / \quad 3x + y + 5 = 0 \\ \hline 7x + 14 = 0 \\ x = -2 \end{array}$$

$x - 2y + 4 = 0$ denkleminde $x = -2$ yazalım.

$$\begin{array}{r} -2 - 2y + 4 = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

Doğruların kesim noktası $(-2, 1)$ dir.

(Cevap C)

ÖRNEK:

$x - y + 2 = 0$, $x + 3y - 18 = 0$ doğruları ile y ekseninin sınırladığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

ÇÖZÜM:

$$\frac{a - 2}{a + 1} = \frac{2}{-3}, \quad a = \frac{4}{5} \text{ tir.}$$

(Cevap A)

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

c) Çakışık Doğrular:

$$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

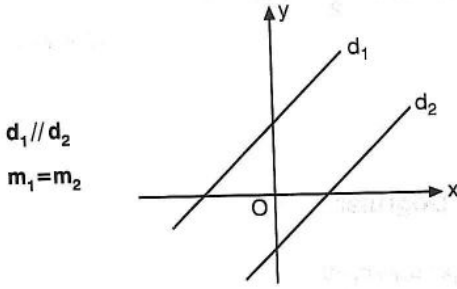
denklem sisteminde, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise d_1 ve d_2 doğruları

çakışiktır.

Çakışık doğruların üzerinde bulunan tüm noktalar çözüm kümesidir.

Paralel Doğruların Eğimi:

Eğimleri m_1 ve m_2 olan d_1 ve d_2 doğruları paralel ise eğimleri eşittir.



ÖRNEK:

$A(3, -4)$ noktasından geçen ve $2x + y - 9 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM:

I. Yol:

$x + y - 9 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = -2$ dir.

Bu doğruya paralel olan doğrunun eğimi $m_2 = -2$ dir.

$A(3, -4)$ noktasından geçen ve eğimi (-2) olan doğrunun denklemini

$$y - (-4) = -2(x - 3), \quad 2x + y - 2 = 0 \text{ dir.}$$

II. Yol:

$2x + y - 9 = 0$ doğrusuna paralel olan doğru $2x + y + c = 0$ dir.

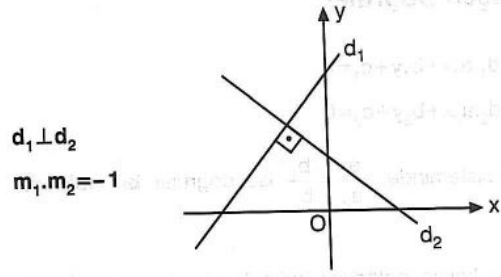
$A(3, -4)$ noktası bu denklemini sağlar.

$$2 \cdot 3 - 4 + c = 0, \quad c = -2$$

$$2x + y - 2 = 0 \text{ dir.}$$

Dik Kesişen Doğrular:

Eğimleri m_1 ve m_2 olan ve eksenlere paralel olmayan d_1 ve d_2 doğruları birbirine dik ise eğimleri çarpımı (-1) dir.



ÖRNEK:

$$3x - y + 1 = 0$$

$$ax + (a - 4)y - 4 = 0$$

doğruları birbirine dik olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM:

$3x - y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = 3$

$ax + (a - 4)y - 4 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = -\frac{a}{a - 4}$

Doğrular dik ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir.

$$3 \cdot \left(-\frac{a}{a - 4}\right) = -1, \quad 3a = a - 4, \quad a = -2 \text{ dir.}$$

(Cevap B)

ÖRNEK:

Analitik düzlemde

$$CK \perp AB$$

$$C(0, 3)$$

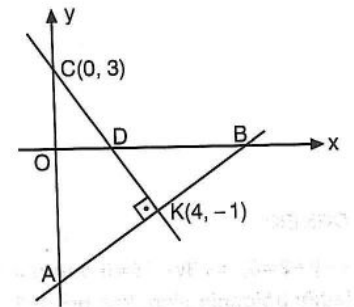
$$K(4, -1)$$

olduğuna göre,

A noktasının

ordinatı kaçtır?

- A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7



DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

ÇÖZÜM:

$$m_{CK} = \frac{3 - (-1)}{0 - 4} = -1$$

$$A(0, y) \text{ ise } m_{AB} = \frac{y - (-1)}{0 - 4} = -\frac{y+1}{4}$$

$$m_{CK} \perp m_{AB} \text{ ise } -1 \cdot \left(-\frac{y+1}{4}\right) = -1$$

$$y+1 = -4$$

$$y = -5 \text{ dir.}$$

(Cevap C)

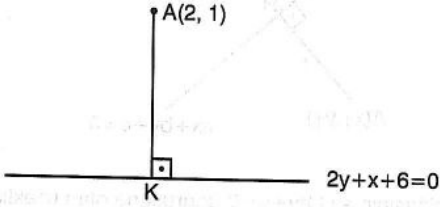
ÖRNEK:

$2y+x+6=0$ doğrusunun, $A(2, 1)$ noktasına en yakın noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (0, -3) B) (0, -2) C) (1, -3) D) (2, -1) E) (1, 2)

ÇÖZÜM:

Doğru üzerinde A noktasına en yakın nokta, A dan doğruya indirilen dikmenin doğruya kestiği K noktasıdır.



$2y+x+6=0$ doğrusunun eğimi $-\frac{1}{2}$ dir.

Doğrular dik olduğundan

$$-\frac{1}{2} \cdot m_{AK} = -1 \text{ ise } m_{AK} = 2$$

AK doğrusunun denklemi: $y-1=2(x-2)$

$$y-2x+3=0$$

Bu iki doğru denklemini ortak çözdüğümüzde doğruların kesişim noktası olan K'yı buluruz.

$$\begin{array}{r} 2/ 2y+x+6=0 \\ + y-2x+3=0 \\ \hline 5y+15=0 \end{array}$$

$$y = -3$$

$$y = -3 \text{ ise } 2 \cdot (-3) + x + 6 = 0$$

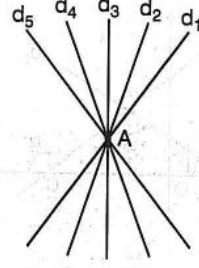
$$x = 0$$

Buna göre $K(0, -3)$ tür.

(Cevap A)

Doğru Demeti

Düzlemde sabit bir A noktasından geçen doğrulara **doğru demeti** denir.



$$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğrularının ortak noktası A olsun.

En az biri sıfırdan farklı m ve n reel sayıları için

$$n(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

denkleminin A noktasından geçen doğruları gösterir.

Bu doğru denkleminde, $\frac{m}{n} = k$ seçilirse

$$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

biçiminde yazılabilir.

Buna göre, A noktasından geçen doğru demeti:

$$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

ÖRNEK:

Analitik düzlemde, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(k+1)x + (k-2)y + 2k - 4 = 0$$

doğrularının geçtiği sabit nokta aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (1, 2) B) (1, 1) C) (1, -2) D) (0, -1) E) (0, -2)

ÇÖZÜM:

Doğru denkleminde

$$k = -1 \text{ için } -3y - 6 = 0, y = -2$$

$$k = 2 \text{ için } 3x + 4 - 4 = 0, x = 0$$

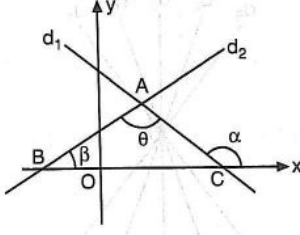
Doğruların geçtiği sabit nokta (0, -2) noktasıdır.

(Cevap E)

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

İki Doğru Arasındaki Açık

d_1 doğrusunun eğim açısı α ve eğimi m_1
 d_2 doğrusunun eğim açısı β ve eğimi m_2 olsun.



İki doğrunun oluşturduğu açılardan birinin ölçüsü θ ise
 ABC üçgeninde $\alpha = \beta + \theta$, $\theta = \alpha - \beta$ ise

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$\tan \alpha = m_1$, $\tan \beta = m_2$ olduğundan

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

UYARI:

$\tan \theta > 0$ ise θ iki doğru arasındaki dar açıdır.

$\tan \theta < 0$ ise θ iki doğru arasındaki geniş açıdır.

ÖRNEK:

$x - 5y + 1 = 0$ ve $2x + 3y - 3 = 0$ doğruları arasındaki geniş
 açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 100 B) 120 C) 135 D) 150 E) 165

ÇÖZÜM:

$x - 5y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = \frac{1}{5}$

$2x + 3y - 3 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{15}} \\ &= \frac{\frac{3}{15} + \frac{8}{15}}{\frac{13}{15}} \\ &= 1 \text{ ise } \theta = 45^\circ \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buna göre, geniş açının ölçüsü: $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ dir.

(Cevap C)

ÖRNEK:

$$y + \sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$y - x + 4 = 0$$

doğrularının arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

ÇÖZÜM:

$y + \sqrt{3}x - 2 = 0$ doğrusunun eğimi $-\sqrt{3}$,

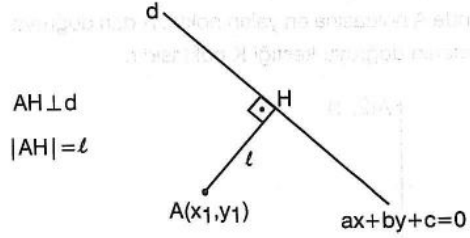
eğim açısı $\alpha = 120^\circ$ dir.

$y - x + 4 = 0$ doğrusunun eğimi 1 ise eğim açısı $\beta = 45^\circ$ dir.

Buna göre, $\theta = \alpha - \beta = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ dir.

(Cevap E)

Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı



$AH \perp d$

$|AH| = l$

$A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı;

$$l = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ÖRNEK:

$A(1, -3)$ noktasının $2x + y - 4 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı
 kaç br dir?

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

ÇÖZÜM:

$$l = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ br dir.}$$

(Cevap E)

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

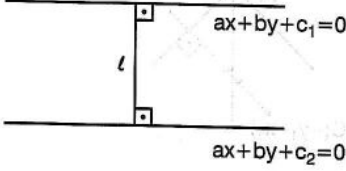
Paralel doğruların eğimleri eşit olduğu için denklemlerde x ve y nin katsayıları eşit duruma getirilebilir.

Bu nedenle paralel doğruların denklemleri

$$ax+by+c_1=0$$

$$ax+by+c_2=0$$

biçiminde yazılabilir.



$$l = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ÖRNEK:

$$3x-2y+4=0$$

$$6x-4y-5=0$$

doğruları arasındaki uzaklık kaç br dir?

- A) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B) 2 C) 3 D) $\sqrt{13}$ E) 4

ÇÖZÜM:

$3x-2y+4=0$ denklemini 2 ile çarpılırsa

$6x-4y+8=0$ denklemini elde edilir.

$6x-4y+8=0$ ve $6x-4y-5=0$ doğruları arasındaki uzaklık

$$l = \frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ br dir.}$$

(Cevap A)

ÖRNEK:

Karşılıklı iki kenarı

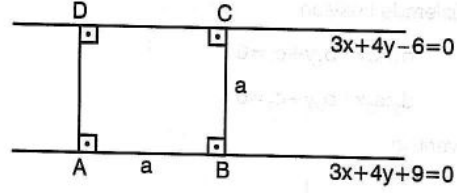
$$3x+4y-6=0$$

$$3x+4y+9=0$$

doğruları üzerinde olan karenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

ÇÖZÜM:



Karenin bir kenarının uzunluğu bu iki paralel doğruların arasındaki uzaklık kadardır.

$$a = \frac{|-6-9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ br}$$

Karenin alanı: $a^2=3^2=9 \text{ br}^2$ dir.

(Cevap D)

ÖRNEK:

$$x+3y-2=0$$

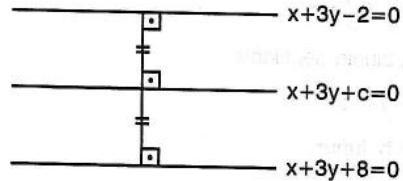
$$x+3y+8=0$$

doğrularına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yer denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x+3y+2=0$ B) $x+3y+3=0$ C) $x+3y+4=0$
D) $3x-y+2=0$ E) $3x-y+3=0$

ÇÖZÜM:

Doğrular paralel olduğundan bu doğrulara eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bu doğruların ortasında ve doğrulara paralel bir doğrudur.



$c = \frac{-2+8}{2} = 3$ ise geometrik yer denklemi $x+3y+3=0$ doğrusudur.

(Cevap B)